**Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами**

Рассмотрим уравнение

$$a\_{0}y^{\left(n\right)}+a\_{1}y^{\left(n-1\right)}+…+a\_{n}y=0 (1)$$

$$a\_{i}\in C, a\_{0}\ne 0$$

Оно называется линейным однородным уравнением, множество решений этого уравнения является линейным пространством.

Пусть число $θ\in С$,тогда функция $e^{θx}$ будет решением уравнения, если$ θ$ будет корнем многочлена

$a\_{0}θ^{n}+a\_{1}θ^{n-1}+…+a\_{n}=0 (2)$.

Многочлен называется характеристическим. Например

$$\ddot{y}+\dot{y}-2y=0$$

имеет решение $y\_{одн}=c\_{1}e^{x}+c\_{2}e^{-2x}$, т.к. решения можно складывать и умножать на число, получая вновь решения. Покажем, что найдены все решения этого уравнения.

*Теорема1( о нулевом решении)*

Пусть y(x) решение уравнения (1) такое, что $y\left(x\_{0}\right)=0=\dot{y }\left(x\_{0}\right)=…=y^{\left(n-1\right)}\left(x\_{0}\right)$ тогда $y\left(x\right)≡0.$

Функции $y\_{1}\left(x\right), y\_{2}\left(x\right),…,y\_{k}\left(x\right) $ называются линейно независимыми на интервале, если существует их нетривиальная линейная комбинация тождественно равная нулю.

*Следствие1 теоремы о нулевом решении*: Любые n+1 решения уравнения (1) линейно независимы.

Определителем Вронского называется определитель$\left|\begin{matrix}y\_{1}\left(x\right)&y\_{2}\left(x\right)….&y\_{n}\left(x\right)\\\dot{y}\_{1}\left(x\right)…&\dot{y}\_{2}\left(x\right)….&\dot{y}\_{n}\left(x\right)\\y^{\left(n-1\right)}\_{1}\left(x\right)&y^{\left(n-1\right)}\_{2}\left(x\right)&y^{\left(n-1\right)}\_{n}\left(x\right)\end{matrix}\right|$ , составленный из решений уравнения (1).

*Следствие 2 теоремы о нулевом решении*: Если определитель Вронского W($x\_{0}$) равен нулю, то решения линейно зависимы.

*Теорема о линейной независимости квазимногочленов*:

Линейно независимыми являются функции:

$$e^{θ\_{1}x}, x.e^{θ\_{1}x}…x^{k\_{1}}e^{θ\_{1}x}$$

$$…………………………$$

$$e^{θ\_{m}x}, xe^{θ\_{m}x}….x^{k\_{m}}e^{θ\_{m}x}$$

По этой теореме понимаем, что в примере найдено общее решение уравнения .

*Теорема2 о структуре решения:* Если $θ\_{1},θ\_{2}, ….θ\_{m}$ все корни характеристического многочлена $l\_{1},l\_{2},….,l\_{m }$их кратности, то общее решение уравнения (1)

$$y\_{одн}=P\_{1}\left(x\right)e^{θ\_{1}x}+…+P\_{m}(x)e^{θ\_{m}x}$$

Где степень многочлена $P\_{i}(x)$ равна $l\_{i}-1$.

Примеры:

1. $\ddot{y}-4\dot{y}$+3y=0

Решение : корни характеристического многочлена равны 1 и 3, поэтому

$$y\_{одн}=C\_{1}e^{x}+C\_{2}e^{3x}$$

1. $\ddot{y}+6\dot{y}+9y=0$

Решение: корень характеристического многочлена равен 3 имеет кратность 2, поэтому

$y\_{одн}=e^{3x}(C\_{1}x+C\_{2})$.

1. $\ddot{y}+4\dot{y}+13y=0$

Решение: характеристический многочлен имеет пару комплексно-сопряженных корней -2-3i ,-2+3i, с учетом формулы Эйлера получаем

$$y\_{одн}e^{-2x}\left(C\_{1}\cos(3x+C\_{2}\sin(3x).)\right)$$